Apellidos:
Nombre:

VARIEDADES DIFERENCIABLES Y VDEE
Examen final de Febrero Curso 14-15.

TEST. [1]

- No se pueden utilizar libros, ni apuntes.
- Las justificaciones han de estar bien detalladas.
- Tiempo: 1 hora.

1) Si una función diferenciable f es constante sobre cada curva integral de un campo X, entonces necesariamente es $X(f) = 0$.

CIERTO	
FALSO	

Justificación:

---

2) Dado un punto p de una variedad diferenciable M siempre existe una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $f \geq 0$, y $f^{-1}(0) = \{p\}$.

CIERTO	
FALSO	

Justificación:

[1] Cada respuesta/justificación acertada vale 0,4 puntos (0,1 respuesta/ 0,3 justificación) Cada respuesta fallada descuenta 0,2 puntos. Una respuesta acertada con justificación disparatada vale 0 puntos. La nota final está entre –0,5 y 2 puntos.

3) El campo

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z}$$

en $\mathbb{R}^3$es tangente al paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$.

CIERTO	
FALSO	

Justificación:

———————————————————————————————————————

4) Una forma exacta de grado máximo en una variedad compacta y conexa, se anula necesariamente en algún punto.

CIERTO	
FALSO	

Justificación:

———————————————————————————————————————

5) La restricción de $\omega = xdy \wedge dz - ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ a la esfera $\mathbb{S}^2$ (convenientemente orientada) es su forma de volumen canónica.

CIERTO	
FALSO	

Justificación:

———————————————————————————————————————

Apellidos:
Nombre:

VARIEDADES DIFERENCIABLES Y VDEE
Examen final de Febrero Curso 15-16.
PARTE TEÓRICA

- NO SE PUEDEN UTILIZAR LIBROS, NI APUNTES.
- TODAS LAS IGUALDADES HAN DE ESTAR SUFICIENTEMENTE JUSTIFICADAS.
- TIEMPO: 30 MINUTOS.

Tema Teórico (0,5 puntos)
Si V es un campo y α es una $1-$forma en una variedad M, demostrar que $\beta : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ definida por

$$\beta(X) = V(\alpha(X)) - \alpha([V, X])$$

es también una $1-$forma.

Cuestión (1,5 punto)
En $\mathbb{R}^2$ con coordenadas (x, y), calcular β, supuesto que [2]

$$V = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y},\ \alpha = ydx - xdy$$

[2] Es decir calcular las funciones $A = A(x, y)$, $B = A(x, y)$ tales que $\beta = Adx + Bdy$.

Apellidos:
Nombre:

VARIEDADES DIFERENCIABLES Y VDEE
Examen final de Febrero del 2015
PARTE PRÁCTICA.

- Se pueden utilizar libros y apuntes, pero no calculadoras ni similares.
- Todas las respuestas han de estar suficientemente justificadas.
- Tiempo: 2 horas 30 minutos.

Ejercicio 1 (2 ptos)
Sea M subconjunto de la variedad diferenciable N. Probar que M es subvariedad m-dimensional de N , si por cada punto $p \in M$, existe una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ de N, con $p \in \mathcal{U}$, y $\varphi(\mathcal{U} \cap M)$ es subvariedad m-dimensional de $\varphi(\mathcal{U})$.

Ejercicio 2 (3 ptos).
Dar estructura de variedad diferenciable de dimensión 2 al conjunto

$$M = \left\{[x, y, z, w] \in \mathbb{R}P^3 : x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0\right\}$$

de forma que la aplicación inclusión $M \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}P^3$ sea una inmersión. ¿Es M subvariedad regular de $\mathbb{R}P^3$?

Demostrar que M es difeomorfa al toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, y que la aplicación

$$f : M \ni [x, y, z, w] \to \frac{zw}{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$

está bien definida en todo M y es diferenciable. Determinar los puntos $p \in M$, en donde $df(p) = 0$.

Ejercicio 2 (2 ptos)
a) Calcular la integral $\int_{\mathbb{S}^2_r} \omega$ siendo $\mathbb{S}^2_r = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\right\}$ la esfera de radio $r > 0$ y ω es la 2-forma en $\mathbb{R}^3$ dada por $\omega = xydy \wedge dz - 2yzdx \wedge dz + z(y + z - 3)\, dy \wedge dx$.

b) Probar que si ϑ es una 2-forma cerrada en $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ entonces la integral $\int_{\mathbb{S}^2_r} \vartheta$ no depende de r.
Indicación: Usar el teorema de Stokes.

Soluciones.

Cuestión:

$$\beta = \beta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)dx + \beta\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)dy$$

pero

$$\begin{aligned}\beta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= V\left(\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) - \alpha\left(\left[V, \frac{\partial}{\partial x}\right]\right)\\ &= V(y) - \alpha\left(-2x\frac{\partial}{\partial x}\right) = y^2 + 2xy\end{aligned}$$

analogamente se obtiene $\beta(\partial/\partial y) = -x^2 - 2xy$, por tanto

$$\beta = \left(y^2 + 2xy\right)dx - \left(x^2 + 2xy\right)dy$$

Ejercicio 1: Consultar manual del curso (Prop. 3.37 pág 29).

Ejercicio 2.

Hay varias posibilidades. Una consiste en definir cartas del tipo $\varphi^{-1} : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \to M$

$$\varphi^{-1}(u, v) = [\cos u, \sin u, \cos v, \sin v]$$

y otra análoga $\overline{\varphi}$ cambiando el dominio $\overline{\varphi}^{-1} : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to M$,...etc. Observese que este tipo de cartas hace transparente el hecho de que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es difeomorfo a M mediante la aplicación

$$(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v) \to [\cos u, \sin u, \cos v, \sin v]$$

Otra posibilidad es comprobar que para la carta φ_w de $\mathbb{R}P^3$ con dominio $\mathcal{U}_w = \{[x, y, z, w] : w \neq 0\}$

$$\varphi_w^{-1} : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to [x, y, z, 1] \in \mathbb{R}P^3$$

se tiene que $\varphi_w(\mathcal{U}_w \cap M) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ que es subvariedad de $\mathbb{R}^3$. Análogamente con las cartas φ_x, φ_y φ_z.

Tomando la carta φ de M vemos que

$$f \circ \varphi^{-1} = \cos v \sin v = \frac{1}{2}\sin 2v$$

con lo que $D\left(f \circ \varphi^{-1}\right) = (0, \cos 2v) = (0, 0) \Longrightarrow v = \pm\pi/4$, y los puntos singulares son

$$\begin{aligned}S &= \left\{[x, y, z, w] \in M : z = \pm\sqrt{2}/2,\ w = \pm\sqrt{2}/2\right\}\\ &= \left\{[x, y, z, w] \in M : \Big/ \begin{array}{c} z = \pm\sqrt{2}/2,\ w = \pm\sqrt{2}/2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\}\end{aligned}$$

Ejercicio 3.

a) $d\omega = 3dx \wedge dy \wedge dz$ que es la forma de volumen canónica y

$$\int_{\mathbb{S}_r^2} \omega = \int_{\mathbb{B}_r^3} d\omega = 3vol\left(\mathbb{B}_r^3\right) = 4\pi r^3$$

b) Si $0 < r < R$ entonces el dominio D definido por las ecuaciones $r \leq x^2+y^2 \leq R^2$ es un dominio regular, con frontera $\mathbb{S}_r^2 \cup \mathbb{S}_R^2$ y

$$0 = \int_D d\vartheta = \int_{\partial D} \vartheta = \int_{\mathbb{S}_R^2} \omega - \int_{\mathbb{S}_r^2} \omega$$